Др Душан Дамиан

MATLAB

(Скрипте)

Београд, 2015.

Матлаб

(УВОД)

Име Матлаб је настало као спој скраћеница од *Matrix Laboratory*.
У овом програмском језику матрице су основни градивни елемент за даљи рад. Скаларне величине се одређују као матрице (1x1), или као дијагоналне матрице. У Матлабу се могу радити и основни нумерички прорачуни. Ознаке за основне рачунске операције су уобичајне. Често се користи наредба `clear all`, којом се бришу претходно унесени подаци.

Z₁ Сабрати матрице A и B ако је:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

```
>> A=[1 -3 1;2 -1 1;1 2 -2];
>> B=[2 0 1;3 0 2;-1 1 -1];
>> C=A+B

C =
     3    -3     2
     5    -1     3
     0     3    -3
```

Матрице могу да се записују у угластим заградама, или позиционирањем елемената.

Z_2 Одредити матрицу C= A*B ако је:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

```
>> A=[1 -3  1
      2 -1  1
      1  2 -2];

>> B=[2 0;3 0;-1 1];
```

```
>> C=A*B;
>> C

C =   -8     1
       0     1
      10    -2
```

Број елемената једнодимензионе матрице (p), одређује се наредбом: length (p)

```
>> p = [5 6 -7];
>> length(p)
ans 3
```

Димензије матрице (А) одређују се наредбом *size(A)*

```
>> clear all
>> A=[1 2 3 4 5;6 7 8 9 11];
>> [m,n]=size(A)
m = 2
n = 5
```

Z$_3$ Одредити транспоноване матрице А и В ако је:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

Апостоф (') код матрице одређује њену транспоновану матрицу

```
>> A=[1 -3 1;2 -1 1;1 2 -2];
>> B=[2 0 ;3 0 ;-1 1];
>> A', B'
    ans = 1      2      1
         -3     -1      2
          1      1     -2
    ans = 2      3     -1
          0      0      1
```

Наредбом *eye(k)* добијају се јединичне матрице реда *k*

Z$_4$ Формирати јединичне матрице А,В,С – петог, трећег и другог реда.

```
>> clear all
>> A = eye(5),B=eye(3),C=eye(2)
```

```
A = 1      0      0      0      0
    0      1      0      0      0
    0      0      1      0      0
    0      0      0      1      0
    0      0      0      0      1

B = 1      0      0
    0      1      0
    0      0      1

C = 1      0
    0      1
```

Нула матрица од **m-**редова и **n-**колона добија се наредбом ***zeros(m,n)***
Ове zeros(m,n) матрице могу добро да послуже код интерполационих полинома.
Матрица од **m-**редова и **n-**колона чији су елементи јединице добија се наредбом ***ones(m,n)***.

Z$_5$ Одредити осно-симетричну матрицу матрице А, где је оса симетрије права која је паралелна вектору колоне и геометриски полови матрицу А ако је:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Ако помножимо матрицу А са косо-симетричном јединичном матрицом, добићемо тражену симетричну матрицу.

```
>>  clear all
>>  A=[1 2 3 4; 5 6 7 8;9 10 11 12;9 10 11 12]
>>  B=[0 0 0 1
      0 0 1 0
      0 1 0 0
      1 0 0 0];
>>  M=A*B

M =  4      3      2     1
     8      7      6     5
    12     11     10     9
    12     11     10     9
```

Z_6 Одредити осно симетричну матрицу задате матрице А, где је оса симетрије права која је паралелна вектору врсте и геометриски полови матрицу А:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 9 & 10 & 11 & 12\end{bmatrix}$$

--

```
>>  clear all
>>  A=[1 2 3 4; 5 6 7 8;9 10 11 12;9 10 11 12]
>>  B=[0 0 0 1
      0 0 1 0
      0 1 0 0
      1 0 0 0];
>> B*A

ans = 9    10    11    12
      9    10    11    12
      5     6     7     8
      1     2     3     4
```

Z_7 Одредити централно симетричну матрицу задате матрице А, где је центар симетрије средиште матрице А:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 9 & 10 & 11 & 12\end{bmatrix}$$

```
>> clear all
>> A=[1 2 3 4; 5 6 7 8;9 10 11 12;9 10 11 12];
>> B=[0 0 0 1; 0 0 1 0; 0 1 0 0;1 0 0 0];
>> S=B*A*B

S = 12    11    10     9
    12    11    10     9
     8     7     6     5
     4     3     2     1
```

Z_8 За задату матрицу

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix},$$

1) одредити A^2
2) одредити A^3

3) одредити матрицу квадрата њених чланова
4) одредити матрицу кубова њених чланова
5) сваки члан матрице увећати за 10.

```
>> A=[1 -3 1;2 -1 1;1 2 -2];
```

1)

```
>> A1=A^2

A1 =
    -4     2    -4
     1    -3    -1
     3    -9     7
```

2)

```
>> A2=A^3

A2 =
    -4     2     6
    -6    -2     0
    -8    14   -20
```

3)

```
>> A3=A.^2

A3 =
     1     9     1
     4     1     1
     1     4     4
```

4)

```
>> A4=A.^3

A4 =
     1   -27     1
     8    -1     1
     1     8    -8
```

5)

```
>> A5=A+10

A5 =
    11     7    11
    12     9    11
    11    12     8
```

На основу интерних правила, квадрати чланова матрице А задају се наредбом А.^2, а сабирање сваког члана матрице А са бројем 10 се врши наредбом А+10, што је у матричном рачуну нешто као сабирање „баба и жаба“.

Систем линеарних једначина

Једначина са n непознатих: $x_1, x_2, ...x_n$, облика $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, где коефицијенти $a_1, a_2, ...a_n$ нису сви истовремено нуле, је линеарна алгебарска једначина. Њена лева страна представља линеарну форму. Скуп решења ове једначине је скуп свих уређених n-торки бројева $x_1, x_2, ...x_n$, који ту једначину идентички задовољавају.

Конјункција једначина:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \qquad (1)$$

је систем од m линеарних алгебарских једначина са n непознатих. Он је нехомоген ако слободни чланови $b_1, b_2, ...b_n$ нису сви једнаки нули, а хомоген је ако су сви слободни чланови $b_1, b_2, ...b_n$ једнаки нули.

Скуп решења система *(1)* је скуп свих уређених n-торки бројева $x_1, x_2, ...x_n$ које те једначине идентички задовољавају. Ако систем има решења каже се да је решив, сагласан, могућ или конзистентан.

Уколико систем има само једно решење онда је то јединствено решење система.

Ако систем има више решења, уводи се појам општег решења.

Ако систем нема решења каже се да је нерешив, немогућ, несагласан, противуречан или неконзистентан.

Два система линеарних једначина су еквивалентна ако је свако решење првог система истовремено и решење другог система, и ако је свако решење другог истовремено и решење првог система.

Из следећа два важна правила решавања обичне једначине са једном непознатом:

- Ако левој и десној страни додамо исти број, нова једначина је еквивалентна полазној.
- Ако леву и десну страну једначине помножимо бројем који је различит од нуле, нова једначина је еквивалентна полазној.

произилазе правила за системе линеарних једначина.

При следећим трансформацијама система, настаје еквивалентан ситем:

1) Међусобна замена било које две једначине.
2) Множење било које једначине бројем различитим од нуле.
3) Било која једначина се помножи неким бројем и дода другој једначини.

Систем једначина

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \qquad (1)$$

може да се запише у матричном облику $A \cdot X = B$, где је :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & .. & \ldots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ матрица система, $$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$ матрица непознатих.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$ матрица слободних чланова

Ако се матрици A допише на крају матрица слободних чланова, добија се проширена матрица

$$A_{pr} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & .. & \ldots & & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Код линеарног система једначина имамо систем линеарних форми. Ранг матрице је број независних форми који одређује та матрица (тај систем).

Линеарни "квадратни" систем:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

.

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \,,$$

има једнак број једначина и непознатих.

Матрица система је

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ је матрица непознатих.

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$ матрица слободних чланова

Матрично записан систем линеарних једначина је $A \cdot X = B$, па се решење налази као $X = A^{-1} \cdot B$. У програму Матлаб, наредба за формирање оваквог решења се записује као $X = inv(A) * B$

Z₉ Решити систем једначина

$$\begin{aligned} -2x - \quad 5y \qquad\quad &= -9 \\ x - \quad 8y + \quad 3z &= -6 \\ -10x + \quad 5y - \quad 12z &= -15 \end{aligned}$$

--

```
>> A=[ -2  -5   0; 1  -8  3; -10  5  -12];
>> B=[-9 -6 -15]';
>> X=inv(A)*B

X =
    2.0000
    1.0000
         0
```

Стабилност решења система линеарних једначина, види се при малим променама коефицијената-чланова матрице А, а да су тада и незнатне промене решења система. Када су чланови система “приближно тачни” са неком грешком ε, показатељ стабилности је $cond(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ ако је $cond(A)$ близу броја један онда је систем стабилан. За нестабилне системе $cond(A)>1$.За сингуларне матрице А, $cond(A)=\infty$.

Матлаб садржи програм **linsolve** за троугаоне декомпозиције матрице система A=LU и на основу њега се постиже "побољшано" решавање линеарног система. Системи једначина како линеарних тако и нелинеарних, могу да се реше аутоматски наредбом ***solve(f₁,f₂,…fₙ)***

Z_{10} Решити систем једначина,ако је a =1

$$x+y=2$$
$$x+2y=3a$$

--

```
>> clear all
>> syms x y a
>> a=1;
>> f1=x+y-2;
>> f2=x+2*y-3*a;
>> [x,y]=solve(f1,f2)
 x =1  y =1
```

Z_{11} Решити систем једначина

$$x^2+y^2=25$$
$$x+2y=11$$

--

```
>> clear all
>> syms x y
>> f1=x^2+y^2-25;
>> f2=x+2*y-11;
>> [x,y]=solve(f1,f2)
 x = 3  y = 4
 x=7/5  y= 24/5
```

Z_{12} Решити систем једначина

а)

$$3x-5y=8$$
$$3x-5.000001y=8.000001$$

б)

$$3x - 5y = 8$$
$$3x - 5.000002y = 7.9996$$

У овом задатку - из књиге "Увод у нумеричку анализу" професора Добрила Тошића илуструје се стабилност система. Мала промена коефицијената система довела је до велике промене код решења.

а)
```
>> clear all
>> syms x y
>> [x,y]=solve('3*x-5*y-8','3*x-5.000001*y-8.000001')
  x=1.0:y =-1.0
```

б)
```
>> clear all
>> syms x y
>> [x,y]=solve('3*x-5*y-8','3*x-5.000002*y-7.9996')
 x =336.0:y =200.0
```

Полиноми

Полином променљиве x је израз облика:
$P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$, где су коефицијенти полинома: $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ комплексни бројеви.

Два полинома су једнака ако су им једнаки коефицијенти.

Полином $P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$ може да се представи:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + ... + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$$

Полином $P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$ је реалан, ако су сви његови коефицијенти реални бројеви.

Чланови полинома $P_n(x)$ су $a_n \cdot x^n, a_{n-1} \cdot x^{n-1}, a_1 \cdot x, .., a_0$. Најстарији члан полинома $P_n(x)$ је $a_n \cdot x^n$.

Полином у Матлаб-у се задаје преко својих коефицијената, у опадајућем низу

$$a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$$

На пример:

$4 \cdot x - 7 \qquad p = [4 \quad -7]$

$x^2 - 2 \qquad p = [1 \quad 0 \quad -2]$

$2 \cdot x^3 + x^2 - 8 \qquad p = [2 \quad 1 \quad 0 \quad -8]$

Сабирање два полинома у Матлабу као и у алгебри рачуна се помоћу њихових коефицијената.

Z$_{13}$ Сабрати полиноме
$3x^6 + 15x^5 - 10x^3 - 3x^2 + 2$ и $-3x^2 + 2$

```
>> p1 = [3 15 0 -10 -3 0 2];
>> p2 = [0 0 0 0 -3 0 2];
>> p = p1+p2

p =
     3    15     0   -10    -6     0     4
```

Множење два полинома у Матлабу рачуна се помоћу наредбе
c = conv(a, b)

Где су a и b вектори коефицијената полинома. На пример, помножити
$3x^6 + 15x^5 - 10x^3 - 3x^2 + 2$ и $-3x^2 + 2$

```
>> a = [3 15 0 -10 -3 0 2];
>> b = [0 0 0 0 -3 0 2];
>> c=conv(a,b)

c =
     0     0     0     0    -9   -45     6    60     9   -20   -12     0
```

Дељење полинома *u* и *v* где је *q* полиномни резултат а *r* остатак у Матлабу врши се помоћу наредбе *[q, r] = deconv(u, v)*

Z$_{14}$ Одредити количник полинома *u* и *v*: $u = x^2 - 9x - 10 \qquad v = x - 10$

```
>> clear all
>> u = [1 -9 -10];
>> v=[1 -10];
>> [q, r] = deconv(u, v)

q =
```

```
     1     1

r =
     0     0     0
```

Функцијом ***poly2sym(a)*** можемо векторски запис полинома (**a)** да "вратимо" у уобичајен алгебарски начин.
Функцијоа **poly2sym(a)** креира симболички израз за полином описан вектором *a*

```
>> clear all
>> a = [3 15 0 -10 -3 0 2];
>> S = poly2sym(a)

 S =3*x^6 + 15*x^5 - 10*x^3 - 3*x^2 + 2
```

Вредност полинома за одређену вредност променљиве *x* добија се простим задавањем променљиве и учитавањем полинома:

```
>> clear all
>> x=0;
>> y = (5 * x ^ 3) + (6 * x ^ 2) - (7 * x) + 3
  y = 3
```

или за исти полином, да добијемо вредност полинома кад је x=2

```
>> clear all
>> x=2;
>> y = (5 * x ^ 3) + (6 * x ^ 2) - (7 * x) + 3

y =53
```

Постоје и друге могућности за израчунавање вредности полинома .
Наредбом *y = polyval(p, x)* израчунава се вредност полинома.

```
>> clear all
>> p = [5 6 -7];
>> x=2;
>> y = polyval(p, x)

y =  25
```

За изводе и интеграле полинома постоје већ уграђене функције Матлаба. За извод полинома f је наредба *diff(f,x)* – а за израчунавање интеграла полинома f је наредба *int(f,x).* И за друге функције, за симболичко диференцирање и интеграљење могу да се користе ове наредбе. Променљива се декларише на почетку програма са *syms x*.

Z₁₅ Одредити извод D и интеграл I полинома $f = x^3 + 2x^4$

```
>> clear all
>> syms x
>> f = x^3+2*x^4;
>> D=diff(f,x), I=int(f,x)

D =8*x^3 + 3*x^2

I =(x^4*(8*x + 5))/20
```

За одређене интеграле користи се иста наредба *int(f,a,b)* где су границе интеграла a и b

Z_{16} Израчунати одређени интеграл „O“ полинома $f = x^3 + 2x^4$ у границама (0,2).

```
clear all
syms x
f = x^3+2*x^4;
O=int(f,0,2)
 O =84/5
```

За несвојствене интеграле са позитивном бесконачном границом користи се: *int(f,x,a,inf)*

Z_{17} Израчунати несвојствени интеграл

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$$

```
clear all
syms x
f = 1/x^3;
>> int(f,x,1,inf)

ans =1/2
```

Лагранжов интерполациони полином

За две задате тачке $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ интерполациони полином је првог степена:

$$y = a_1 \cdot x + a_0$$

уствари непознате a_1 и a_0 одређују се из система једначина:

$$a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1$$

$$a_1 \cdot x_2 + a_0 = y_2 \qquad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}}, \quad a_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}}$$

За три задате тачке $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$ интерполациони полином је другог степена:

$$y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

Коефицијенти a_2 , a_1 и a_0 одређују се из система једначина:

$$a_2 \cdot {x_1}^2 + a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1$$
$$a_2 \cdot {x_2}^2 + a_1 \cdot x_2 + a_0 = y_2$$
$$a_2 \cdot {x_3}^2 + a_1 \cdot x_3 + a_0 = y_3$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}, \qquad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}, \qquad a_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

За n- задатих тачака $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$,..., $M_n(x_n,y_n)$ интерполациони полином n-1 степена је:

$$y = a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + ... + a_1 \cdot x + a_0$$

Коефицијенти a_{n-1} , a_{n-2} … a_0 одређују се из система једначина(на основу Крамеровог правила):

$$a_{n-1} \cdot {x_1}^{n-1} + a_{n-2} \cdot {x_1}^{n-2} + ... + a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1$$
$$a_{n-1} \cdot {x_2}^{n-1} + a_{n-2} \cdot {x_2}^{n-2} + ... + a_1 \cdot x_2 + a_0 = y_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} \cdot {x_n}^{n-1} + a_{n-2} \cdot {x_n}^{n-2} + ... + a_1 \cdot x_n + a_0 = y_n$$

$$a_{n-1}=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\ n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2^{\ n-2} & \dots & x_2 & 1 \\ . & . & \dots & \dots & . \\ . & . & \dots & \dots & . \\ y_n & x_n^{\ n-2} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{\ n-1} & x_1^{\ n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{\ n-1} & x_2^{\ n-2} & \dots & x_2 & 1 \\ . & . & \dots & \dots & . \\ . & . & \dots & \dots & . \\ x_n^{\ n-1} & x_n^{\ n-2} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}},\dots \quad a_1=\frac{\begin{vmatrix} x_1^{\ n-1} & x_1^{\ n-2} & \dots & y_1 & 1 \\ x_2^{\ n-1} & x_2^{\ n-2} & \dots & y_2 & 1 \\ . & . & \dots & \dots & . \\ . & . & \dots & \dots & . \\ x_n^{\ n-1} & x_n^{\ n-2} & \dots & y_n & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{\ n-1} & x_1^{\ n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{\ n-1} & x_2^{\ n-2} & \dots & x_2 & 1 \\ . & . & \dots & \dots & . \\ . & . & \dots & \dots & . \\ x_n^{\ n-1} & x_n^{\ n-2} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}}, \quad a_0=\frac{\begin{vmatrix} x_1^{\ n-1} & x_1^{\ n-2} & \dots & x_1 & y_1 \\ x_2^{\ n-1} & x_2^{\ n-2} & \dots & x_2 & y_2 \\ . & . & \dots & \dots & . \\ . & . & \dots & \dots & . \\ x_n^{\ n-1} & x_n^{\ n-2} & \dots & x_n & y_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{\ n-1} & x_1^{\ n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{\ n-1} & x_2^{\ n-2} & \dots & x_2 & 1 \\ . & . & \dots & \dots & . \\ . & . & \dots & \dots & . \\ x_n^{\ n-1} & x_n^{\ n-2} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}}$$

Коефицијенти интерполационог полинома могу да се добију и помоћу матричног рачуна:

За n задатих тачака $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$,..., $M_n(x_n,y_n)$ интерполациони полином n-1 степена је:

$$y=a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+.....+a_1\cdot x+a_0$$

Непознати коефицијенти a_{n-1} , a_{n-2} … a_0 из једначина

$$\begin{aligned} &a_{n-1}\cdot x_1^{\ n-1}+a_{n-2}\cdot x_1^{\ n-2}+....+a_1\cdot x_1+a_0=y_1 \\ &a_{n-1}\cdot x_2^{\ n-1}+a_{n-2}\cdot x_2^{\ n-2}+....+a_1\cdot x_2+a_0=y_2 \\ &\qquad\vdots \\ &a_{n-1}\cdot x_n^{\ n-1}+a_{n-2}\cdot x_n^{\ n-2}+....+a_1\cdot x_n+a_0=y_n \end{aligned}$$

одређују се матрично

$$\begin{bmatrix} x_1^{\ n-1} & x_1^{\ n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{\ n-1} & x_2^{\ n-2} & \dots & x_2 & 1 \\ . & . & \dots & \dots & . \\ . & . & \dots & \dots & . \\ x_n^{\ n-1} & x_n^{\ n-2} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ . \\ . \\ a_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$M\cdot W=B$$

$$W=M^{-1}\cdot B$$

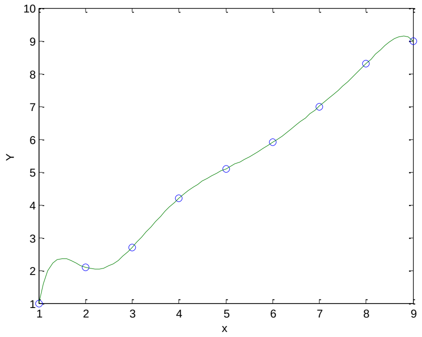
где су матрице M,W,B

$$M=\begin{bmatrix} x_1^{\ n-1} & x_1^{\ n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{\ n-1} & x_2^{\ n-2} & \dots & x_2 & 1 \\ . & . & \dots & \dots & . \\ . & . & \dots & \dots & . \\ x_n^{\ n-1} & x_n^{\ n-2} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix} \quad W=\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ . \\ . \\ a_0 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

Пошто постоји у Матлабу већ готов програм за Лагранжов интерполациони полином, њега ћемо користити.

Z_{18} За девет задатих тачкака x=[1 2 3 4 5 6 7 8 9]; y=[1 2.1 2.7 4.2 5.1 5.9 7 8.3 9] одредити интерполациони полином и представити график полиномне функције.

```
clear all
x=[1 2 3 4 5 6 7 8 9];
y=[1 2.1 2.7 4.2 5.1 5.9 7 8.3 9];
 xp=1:0.1:9;
yp=polyval(p,xp);
plot(x,y,'o',xp,yp)
 xlabel('x');ylabel('Y')
```



Сплајн интерполација

За *n* задатих тачака $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$,..., $M_n(x_n,y_n)$ интерполациони полином n-1 степена је:

$$y = a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + ... + a_1 \cdot x + a_0$$

Овако одређени полиноми осцилују између тачака $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$,..., $M_n(x_n,y_n)$

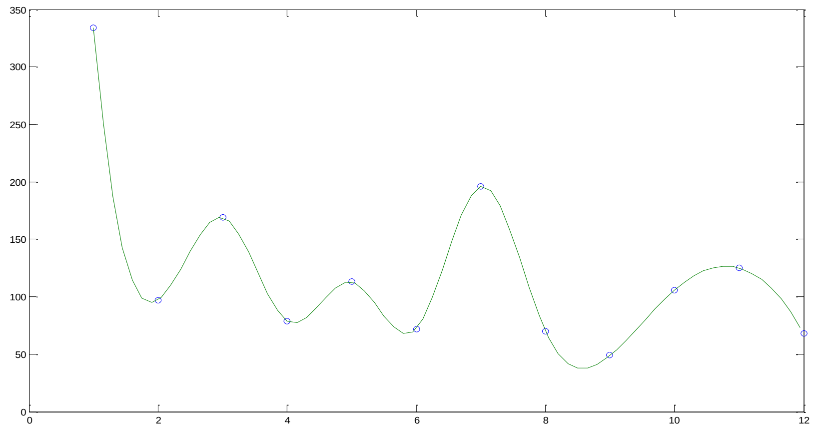
Да би зе избегле те осцилације користи се сплајн метода. Најчешће коришћен сплајн је трећег степена –чија је следећа дефиниција:

На подели сегмрнта $[a,b]$ $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$ реална сплајн функција S задовољава да су њен први и други извод непрекидне функције, да пролази кроз тачке $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$,..., $M_n(x_n,y_n)$, -као интерполациони полином он мора да пролази кроз задате тачке,док за апроксимативне полиноме то није обавезно. На сваком подинтервалу $[x_j, x_{j+1}]$ S(x) је полином трећег степена..

Z19 За x=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12]; дванаест мерних временских интервала број возила који у раскрсници се кретао право је:

y=[334,97,169,79,113,72,196,70,49,106,125,68]

У Матлабу одредити график кубног сплајн интерполационог полинома



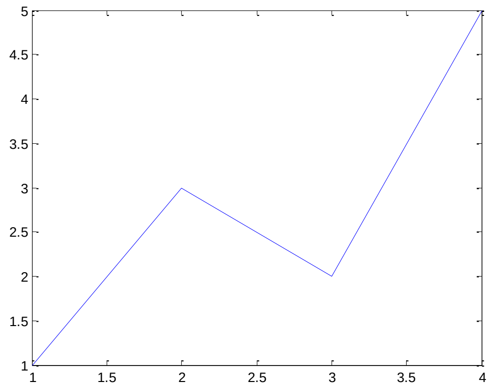

```
clear all
 x=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12]; y=[334 97 169 79 113 72 196 70 49 106 125
68];
xx =[1:.15:12];
yy = spline(x,y,xx);
plot(x,y,'o',xx,yy)
```

График функције

Наредбом *plot(x,y,'o',xx,yy)* цртали смо полиномну функцију. За израчунавање *y*-вектора, коришћен је кубни интерполациони сплајн полином. Суседне тачке у Матлабу спајају се дужима. Од густине тих тачака наше око региструје различите “криве“.

Z_{20} Нацртати изломљену линију,тако да суседне тачке буду спојене дужима: (1,1);(2,3);(3,2);(4,5)

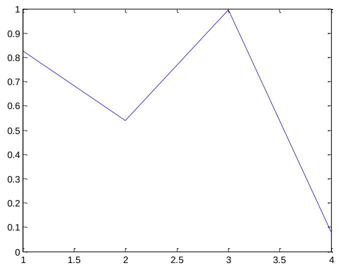
```
clear all
 x = 1:4;
 y=[1 3 2 5];
 plot(x,y)
```



Z$_{21}$ Нацртати изломљену линију,која спаја суседне тачке дужима. Вредности за x су [1 2 3 4], а координате y-налазе се функцијом “случајних бројева“.

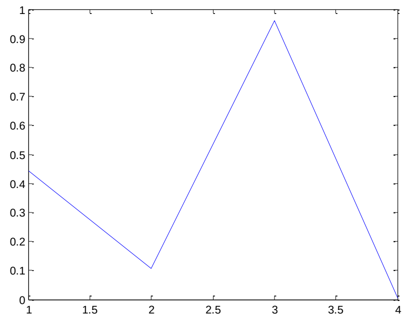
--

```
clear all
 x = 1:4;
y = rand(4,1);
>> y
y =0.8258 0.5383  0.9961 0.0782
>>  plot(x,y)
```



поново“копирани програм у Матлабу“ даје следећи график функције.

```
clear all
 x = 1:4;
y = rand(4,1);
>> y

y =
    0.4427
    0.1067
    0.9619
    0.0046

>>  plot(x,y)
```



Наредба у Матлабу којом целобројна псеудослучајна променљива N, „симулира“ 10 бацања коцкице:
*N=fix((rand(1,10)*6)+1)*

```
clear all
N=fix((rand(1,10)*6)+1)
N =   3      6      1      4      5      2      3      2      2      3
```

Z$_{22}$ Помоћу псеудослучајних бројева симулирати бацање коцке сто пута

```
clear all
>> M=fix(rand(10)*6+1)
```

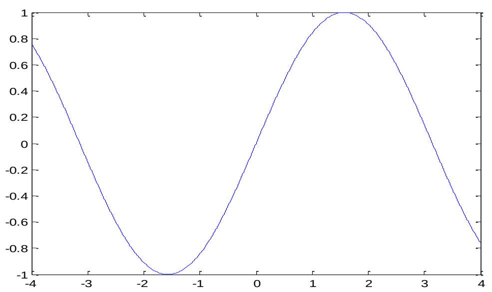
Z$_{23}$ Помоћу псеудослучајних бројева симулирати бацање две коцкице 36 пута. Регистровати добијене бројеве и њихов збир и одступање збира од броја 7.

```
clear all
N=fix((rand(6)*6)+1);M=fix((rand(6)*6)+1);
>> N


N =
     6     5     1     4     4     3
     1     6     4     2     3     2
     4     6     4     6     6     4
     1     6     5     4     4     6
     4     4     1     3     4     3
     1     2     4     6     5     1

>> M

M =
     3     3     2     5     2     6
     2     1     3     1     1     6
```

```
         3         2         1         3         2         2
         6         1         3         1         2         3
         3         3         5         2         1         3
         3         2         2         1         4         4

>>  P=N+M

P =
         9         8         3         9         6         9
         3         7         7         3         4         8
         7         8         5         9         8         6
         7         7         8         5         6         9
         7         7         6         5         5         6
         4         4         6         7         9         5

>>  S=P-7

S =
         2         1        -4         2        -1         2
        -4         0         0        -4        -3         1
         0         1        -2         2         1        -1
         0         0         1        -2        -1         2
         0         0        -1        -2        -2        -1
        -3        -3        -1         0         2        -2
```

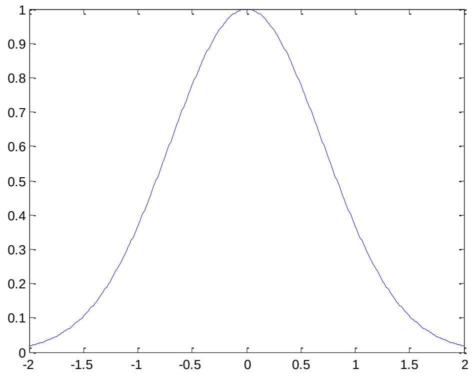
Z_{24} За x у интервалу [-4,4] при кораку 0.1 нацртати „синусоиду"

```
clear all
x = -4:.01:4; y = sin(x); plot(x,y)
```



Z_{25} За x од -2 до 2 кораком 0.01 у координатном систему нацртати Гаусову криву $y = e^{-x^2}$

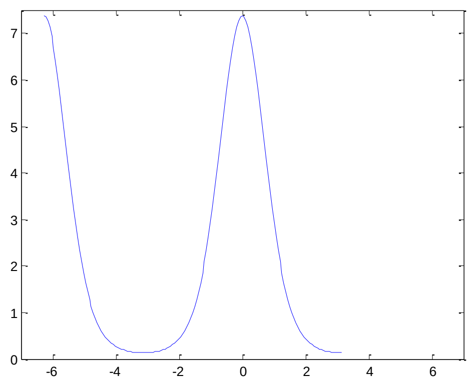
```
clear all
x = -2:.01:2; y = exp(-x.^2); plot(x,y)
```



Наредбом *axis* - одређује се домен кордината. Наредба axis([-7 7 0 7.5]) одређује да је на оси x: $-7 \le x \le 7$ а на оси y: $0 \le y \le 7.5$

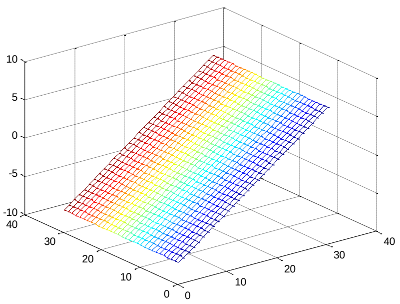
Z$_{26}$ За x од -2π до 2 π кораком 0.02π у координатном систему нацртати криву $y = e^{2\cos t}$

```
clear all
t=-2*pi:pi/50:pi;
 y=exp(2*cos(t));
plot(t,y)
axis([-7 7 0 7.5])
```



Z$_{27}$ За представљање површи у три димензије користи се наредба *mesh.*
За раван y=x, написати програм за њену илустрацију у аксонометрији тродимензионалног простора.

```
x=-7.5:.5:7.5;
y=x;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
>> mesh(X,Y)
```



Криве линије у тродимензионалном простору представљају се наредбом *plot3*.

Z$_{28}$ Задате су тачке у Декартовој равни $(1,1),(2,4),(3,3),(4,5),(7,3)$. Поставити параболу $y = ax^2 + bx + c$ тако да збир растојања (вертикална одстојања) од тачака до параболе буде минималан.

□

$$\begin{array}{lcl}
1 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c & & 1 = a + b + c \\
4 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c & & 4 = 4a + 2b + c \\
3 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c & \Leftrightarrow & 3 = 9a + 3b + c \quad \Leftrightarrow \\
5 = a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c & & 5 = 16a + 4b + c \\
3 = a\cdot 7^2 + b\cdot 7 + c & & 3 = 49a + 7b + c
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\cdot X = B$$

Где је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A\cdot X = B$$

$$A^T(A\cdot X) = A^T B \Leftrightarrow$$

$$(A^T A)\cdot X = A^T B$$

$$(A^T A)^{-1}(A^T A)\cdot X = (A^T A)^{-1} A^T B$$

$$X = (A^T A)^{-1} A^T B$$

Решење са четири децимале

$$X = \begin{bmatrix} -0.2724 \\ 2.4576 \\ -0.8524 \end{bmatrix}$$

$$a = -0.2724 \quad b = 2.4576 \quad c = -0.8524$$

$$y = -0.2724 \cdot x^2 + 2.4576 \cdot x - 0.8524$$

```
>> A=[1 1 1;4 2 1;9 3 1;16 4 1;49 7 1];
>> B=[1;4;3;5;3];
>> C=(A'*A);
>> Y=inv(C);
>> X=Y*A'*B

X =
   -0.2724
    2.4576
   -0.8524
```

Програмски циклус остварује се почетком циклуса са командом “for”, инкрементом који одређује број циклуса, радним наредбама и крајем циклуса са командом “*end*”.

Z_{29} Написати програм за рачунање збира првих 75 природних бројева: $\sum_{i=1}^{75} i$

```
clear all
>> zbir=0;
>> for n=1:75
zbir=zbir+n;
end
>> zbir

zbir =
        2850
```

Z_{30} Написати програм за рачунање **n!**

```
clear all
n=input('Upisati n: '); i=[1:1:n];
fakt=prod(i);
fprintf(1,'Faktorjel: n! = %8i \r',fakt);
Upisati n: 5
Faktorjel: n! =      120
```

Z_{31} Одредити чланове **H(i,j)=1/(i+j-1),** Хилбертове матрице 4x5

```
clear all
for i=1:4
     for j=1:5
H(i,j)=1/(i+j-1);
end
end
>> H

H =
    1.0000    0.5000    0.3333    0.2500    0.2000
    0.5000    0.3333    0.2500    0.2000    0.1667
    0.3333    0.2500    0.2000    0.1667    0.1429
    0.2500    0.2000    0.1667    0.1429    0.1250
```

Z$_{32}$ Одредити десет првих чланова низа $y_n = n^2 + n$

```
clear all
for x=1:10
y(x)=x^2+x;
z(x)=x;
end
>> z,y

z =
     1     2     3     4     5     6     7     8     9    10

y =
     2     6    12    20    30    42    56    72    90   110
```

Линеарно програмирање

У MATLAB-у могу се решавати проблеми оптимизације:

Z$_{33}$ Одредити вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ који минимизира функцију

f(x) = –5x1 – 4x2 –6x3,

при условима:

x1 – x2 + x3 ≤ 20

3x1 + 2x2 + 4x3 ≤ 42

3x1 + 2x2 ≤ 30

0 ≤ x1, 0 ≤ x2, 0 ≤ x3

```
f = [-5; -4; -6];
A =  [1 -1  1
```

```
      3  2  4
      3  2  0];
b = [20; 42; 30];
lb = zeros(3,1);
>> [x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(f,A,b,[],[],lb);
Optimization terminated.
>> x,lambda.ineqlin,lambda.lower

x =
    0.0000
   15.0000
    3.0000


ans =
    0.0000
    1.5000
    0.5000


ans =
    1.0000
    0.0000
    0.0000
```

Z_{34} Одредити вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \qquad\qquad &\le 1 \\ x_1 + \qquad 2x_3 &\le 2 \\ x_1 + x_2 + \quad x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\max f = 4x1 + 2x2 + x3$$

```
clear all
>> f  = -[4 2 1];
A=   [2 1 0;1 0 2];
b =   [1;2];
Aeq = [1 1 1];
beq =  [1];
lb = [0;0;0];
x=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb)
Optimization terminated.

x =

    0.5000
```

```
0.0000
0.5000
```

Логичке функције

На основу теорије минтерма и макстерма логички изрази се представљају помоћу променљивих и операција сабирања множења и инвертовања :

Комбинаторна таблица за импликацију $x \Rightarrow y$: $x \Rightarrow y \Leftrightarrow \bar{x} \vee y$ Матлабу је:

Z=~X|Y
X=[0 0 1 1]';
Y=[0 1 0 1]';
Z=~X|Y

```
clear all
>> X=[0 0 1 1]';
Y=[0 1 0 1]';
>> Z=~X|Y;
>> [X,Y,Z]

ans =
     0     0     1
     0     1     1
     1     0     0
     1     1     1
```

Z$_{35}$ Доказати да је израз $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ таутологија

```
clear all
A=[0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1]';
B=[0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1]';
C=[0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1]';
D=[0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1]';
>> ~A|B==B|(~A);
>> M=~A|B==B|(~A);
>> [A,B,C,D,M]

ans =
     0     0     0     0     1
     0     0     0     1     1
     0     0     1     0     1
     0     0     1     1     1
     0     1     0     0     1
     0     1     0     1     1
     0     1     1     0     1
```

```
0     1     1     1     1
1     0     0     0     1
1     0     0     1     1
1     0     1     0     1
1     0     1     1     1
1     1     0     0     1
1     1     0     1     1
1     1     1     0     1
1     1     1     1     1
```

За слике у покрету користи се нардба *M = moviein(i)* - пример покретања синусоиде:

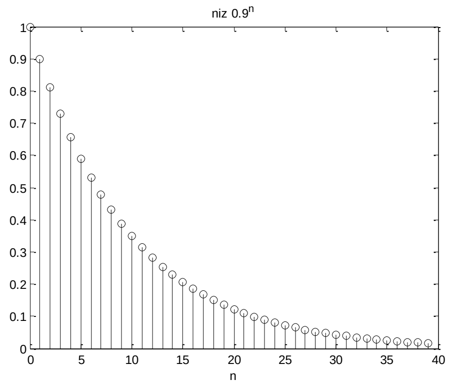
```
t=0:0.1:4*pi;
M = moviein(16); % rezervisanje prostora
for j=1:16
plot(t,sin(t+j/3))
M(:,j) = getframe;
end
movie(M,3,5)
```

Z-трансформације

Име овим трансформацијама дао је творац Фази логике Задех(рођен 1921) - Из примене ове трансформације издвајамо њено коришћење код диференцних једначина. Код пројектовања капациета саобраћајног тока ради се са једначинама у којима је јединица "стандард ауто".Те једначине се често записују као диференцне једначине. Исто кад су у питању сигнали(мрежа семафора) користе се диференцне једначине.
У Матлабу постоје готови програми за примену Z-трансформација.

Z_{36} Представити графички првих четрдесет чланова низа x_n=0.9^n

```
clear all
N=40; a=0.9;
n=(0:N-1)';
x=a.^n;
stem(n,x,'k'),xlabel('n'), title('niz 0.9^n')
```



Z$_{37}$ Одредити Z-трансформацију низа а) $\alpha_n=1/4^n$ b) α_n= cos(2*n)
в) α_n= sin(-0.5*n))

а)
```
clear all
syms z n
ztrans(1/4^n)
ans =z/(z - 1/4)
```

б)
```
clear all
syms z n
ztrans(cos(2*n))
ans =(z*(z - cos(2)))/(z^2 - 2*cos(2)*z + 1)
```

в)
```
clear all
syms z n
ztrans(sin(-0.5*n))
ans =-(z*sin(1/2))/(z^2 - 2*cos(1/2)*z + 1)
```

Z$_{38}$ Одредити инверзну Z-трансформацију за: а) z/(z - 1/4)
b) z/((z-11)*(z+5)*(z-1))

а) z/(z - 1/4)
```
clear all
syms z n
iztrans(z/(z - 1/4))

ans =(1/4)^n
```

b) z/((z-11)*(z+5)*(z-1))
```
clear all
syms z n
iztrans(z/((z-11)*(z+5)*(z-1)))

ans =(-5)^n/96 + 11^n/160 - 1/60
```

Наредба *zplan (b,a)* приказује полове и нуле Z-трансформације, наредба *roots(b)* приказује вредност полова, док наредба *roots(a)* приказује вредност нула

Z$_{39}$ Одредити полове и нуле израза X(z)=$\frac{1-1.6180z^{-1}+z^{-2}}{1-1.5161z^{-1}+0.878z^{-2}}$

```
b=[1 -1.6180 1];
a=[1 -1.5161 0.878];
 roots(b), roots(a)
ans =
   0.8090 + 0.5878i
   0.8090 - 0.5878i
ans =
   0.7581 + 0.5508i
   0.7581 - 0.5508i
```

Z$_{40}$ Коришћењем Z-трансформације решити диференцну једначину

$x_{n+2} - 3x_{n+1} - 10x = 0(x_0 = 3, x_1 = -1$

Применом Z-трансформације на дату једначину следи релација

$$z^2 X(z) - 3z^2 + z - 3(zX(z) - 3z) - 10X(z) = 0$$

решење по X је:

$$X(z) = \frac{3z^2 - 10z}{z^2 - 3z - 10}$$

Решење проблема се добија применом инверзне Z-трансформације

$$x_n = \frac{1}{7}(5^{n+1} + (-2)^{n+4})$$

Метод Монте-Карло

Z$_{41}$ Коришћењем генератора псеудослучајних бројева

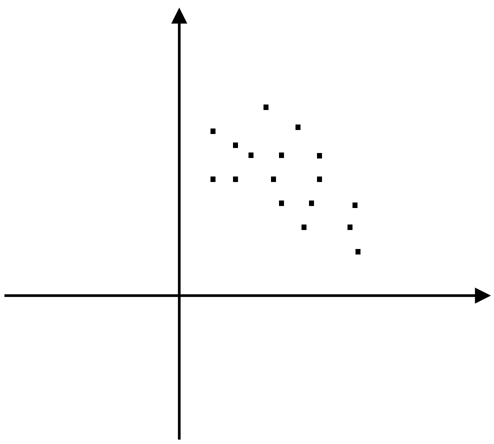
(за 10000000 случајних бројева) одредити интеграл $\int_0^1 x \cdot dx$

```
clear all
>>  N=(sum(rand(1,10000000)))*0.0000001

N = 0.5000

>> N=(sum(rand(1,10000000)))*0.0000001
N =0.5000
```

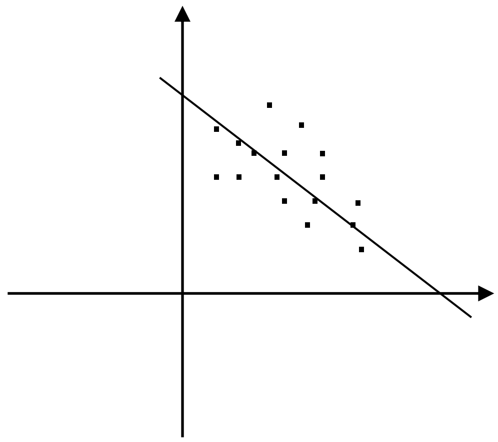
```
>> N=(sum(rand(1,10000000)))*0.0000001
N =0.5001

>> N=(sum(rand(1,10000000)))*0.0000001
N =0.5001

>> N=(sum(rand(1,10000000)))*0.0000001
N = 0.4999

>> N=(sum(rand(1,10000000)))*0.0000001
N = 0.4998

>> N=(sum(rand(1,10000000)))*0.0000001
N =  0.5000

>> N=(sum(rand(1,10000000)))*0.0000001
N =  0.5000
```

Метода најмањих квадрата

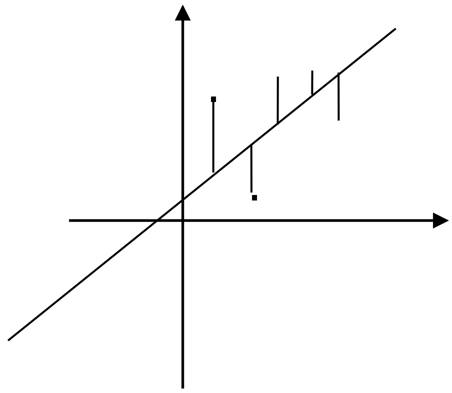
Ако је дат скуп тачака $M_i(x_i, y_i)$ $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ у координатном систему и желимо да кроз тај скуп тачака поставимо неку линију, тако да одступања буду минимална, то можемо да урадимо методом најмањих квадрата која је још позната и као Гаусова метода најмањих квадрата.



Ако кроз „облак“ тачака постављамо праву $y = a \cdot x + b$, алгебарски та права је одређена ако су познате вредности a и b



Гаусовом методом најмањих квадрата праву $y = a \cdot x + b$ одређујемо тако да збир квадрата одстојања тачака до праве по вертикали буде минималан



У овом примеру имамо пет задатих тачака. Повучене су дужи које илуструју пет вертикалних растојања до нацртане праве.

Нека је дат скуп тачака $M_i(x_i, y_i) \quad i = 1,2,......,n$ у координатном систему и желимо да кроз тај скуп тачака поставимо праву линију $y = a \cdot x + b$ тако да збир квадрата одстојања тачака до праве (по вертикали) буде минималан:

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), ..., M_n(x_n, y_n)$$

$$d_1 = a \cdot x_1 + b - y_1, \quad d_2 = a \cdot x_2 + b - y_2, \quad d_3 = a \cdot x_3 + b - y_3, \ldots. d_n = a \cdot x_n + b - y_n$$

$$f(a,b) = S(d^2) = (a \cdot x_1 + b - y_1)^2 + (a \cdot x_2 + b - y_2)^2 + (a \cdot x_3 + b - y_3)^2 + \ldots\ldots + (a \cdot x_n + b - y_n)^2$$

$$f(a,b) = S(d^2) = \sum_{i=1}^{n} (a \cdot x_i + b - y_i)^2$$

За изналажење оптималног решења користи се техника парцијалних извода: Потребан услов да функција има минимум или максимум је

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = 0 \wedge \frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = 0$$

$$f(a,b) = (a \cdot x_1 + b - y_1)^2 + (a \cdot x_2 + b - y_2)^2 + (a \cdot x_3 + b - y_3)^2 + \ldots\ldots + (a \cdot x_n + b - y_n)^2$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow 2(a \cdot x_1 + b - y_1)x_1 + 2(a \cdot x_2 + b - y_2)x_2 + 2(a \cdot x_3 + b - y_3)x_3 + \ldots + 2(a \cdot x_n + b - y_n)x_n = 0$$

$$(a \cdot x_1 + b - y_1)x_1 + (a \cdot x_2 + b - y_2)x_2 + (a \cdot x_3 + b - y_3)x_3 + \ldots + (a \cdot x_n + b - y_n)x_n = 0$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = 0 \Leftrightarrow 2(a \cdot x_1 + b - y_1) + 2(a \cdot x_2 + b - y_2) + 2(a \cdot x_3 + b - y_3) + \ldots + 2(a \cdot x_n + b - y_n) = 0$$

$$(a \cdot x_1 + b - y_1) + (a \cdot x_2 + b - y_2) + (a \cdot x_3 + b - y_3) + \ldots + (a \cdot x_n + b - y_n) = 0$$

Две добијене релације из којих се одређују коефицијенти a и b су

1) $\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow$

$$(a \cdot x_1 + b - y_1)x_1 + (a \cdot x_2 + b - y_2)x_2 + (a \cdot x_3 + b - y_3)x_3 + \ldots + (a \cdot x_n + b - y_n)x_n = 0$$

2) $\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = 0 \Leftrightarrow$

$$(a \cdot x_1 + b - y_1) + (a \cdot x_2 + b - y_2) + (a \cdot x_3 + b - y_3) + \ldots + (a \cdot x_n + b - y_n) = 0$$

Ове једначине могу се још боље прилагодити за практичан рад тј.

$$a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots. + x_n) - (y_1 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2 + y_3 \cdot x_3 + \ldots + .y_n \cdot x_n) = 0$$

$$a(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots. + x_n) - (y_1 + y_2 + y_3 \cdot + \ldots + .y_n) + nb = 0$$

То је систем нормалних једначина, који помоћу оператора "сигме" може да се запише:

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = -n \cdot b$$

За израчунате вредности a и b добија се права линија која се често назива линијом регресије *y* од *x*.

Кроз скуп тачака $M_i(x_i, y_i)$ $i = 1,2,......,n$ у координатном систему можемо да постављамо разне криве линије, тако да одступања методом најмањих квадрата буду минимална .

Најчешће апроксимиране криве су:

$y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + .a_1 \cdot x + a_0$ -полиномна крива

$y = \frac{1}{a_1 x + a_0}$ -хипербола

$y = ab^x$ -експоненцијална крива

$y = ab^x + c$ -модификована експоненцијална крива

$y = \frac{1}{ab^x + c}$ - логистичка крива

Метод којим се одређују непознати коефицијенти код ових апроксимативних кривих, исти је као код одређивања линије регресије Гаусовом методом.

Z$_{42}$ Нека је дато шест тачака $M_i(x_i, y_i)$ $i = 1,2,......,6$ у координатној равни. Одредити праву $y = a \cdot x + b$ која је најбоља апроксимација линеарне функције са аспекта методе најмањих квадрата.

$$M_i: \begin{array}{ccccccc} x & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ y & 5 & 8 & 14 & 17 & 20 & 29 \end{array}$$

$$a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n) - (y_1 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2 + y_3 \cdot x_3 + .. + .y_n \cdot x_n) = 0$$

$$a(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n) - (y_1 + y_2 + y_3 \cdot + .. + .y_n) + nb = 0$$

$$\begin{cases} a(1+4+16+25+36+81) + b(1+2+4+5+6+9) - (5+16+56+85+120+261) = 0 \\ a(1+2+4+5+6+9) - (5+8+14+17+20+29) + 6 \cdot b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 163a + 27b = 543 \\ 27a + 6b = 93 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$y = 3x + 2$$

Ако хоћемо да добијемо праву линију регресије *x* од *y*, користимо:

$$M_i: \quad \begin{array}{ccccccc} x & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ y & 5 & 8 & 14 & 17 & 20 & 29 \end{array}$$

$$A(y_1^2+y_2^2+y_3^2+...+y_n^2)+B(y_1+y_2+y_3+....+y_n)-(y_1\cdot x_1+y_2\cdot x_2+y_3\cdot x_3+..+.y_n\cdot x_n)=0$$

$$A(y_1+y_2+y_3+....+y_n)-(x_1+x_2+x_3+....+x_n)+nB=0$$

$$\begin{cases} A(25+64+196+289+400+841)+B(5+8+14+17+20+29)=543 \\ A(5+8+14+17+20+29)+6B=27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1815A+93B=543 \\ 93A+6B=27 \end{cases}$$

$$x=\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}$$

Z43 Нека је дато осам тачака $M_i(x_i, y_i) \quad i=1,2,......,6$ у координатној равни. Одредити праву $y=a\cdot x+b$ која је најбоља апроксимација у смислу да је збир растојања задатих тачака до праве минималан.

$$\begin{array}{ccccccccc} x & 1 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 & 11 & 14 \\ y & 1 & 2 & 4 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 \end{array}.$$

$$8b+56a=40$$
$$56b+54a=364$$

$$\begin{cases} a=\dfrac{7}{11}=0.636 \\ b=\dfrac{6}{11}=0.545 \end{cases}$$

$$y=0.636x+0.545$$

◊

За "облак тачака" у координатном систему права регресије $y=a\cdot x+b$ има корелацију (грешку) једнаку минималном збиру квадрата вертикалних одступања тачака "облака" до праве.

Инверзан проблем је тражење минимума збира *хоризонталних одступања* тачака "облака" до праве $y=c\cdot x+d$.

На пример превођење текста са енглеског на руски и сад обрнуто са руског на енглески даје карактеристике квалитета превода.

Уколико се регресионе праве поклапају, зависност је функционална - све тачке припадају једној функцији $y=a\cdot x+b$.

Што је мањи угао између регресионих правих јача је линеарна веза између *x* и *y*. Угао између регресионих правих одређује коефицијент корелације- r .

$$r^2 = \frac{\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})]^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}$$

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \quad \text{и} \quad \overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n}$$

Коришћењем матричног рачуна олакшава се рад код методе најмањих квадрата

На пример ако имамо низ тачака $M_i(x_i, y_i) \quad i = 1,2,......,n$ у координатној равни, и треба одредити праву $y = a \cdot x + b$ која је најбоља апроксимација
у смислу да је збир квадрата растојања задатих тачака до праве минималан.
За тачке $M_i(x_i, y_i) \quad i = 1,2,......,n$ кад би припадале правој $y = a \cdot x + b$ важило би:

$$\begin{aligned} &a \cdot x_1 + b = y_1 \\ &a \cdot x_2 + b = y_2 \\ &\vdots \\ &a \cdot x_n + b = y_n \end{aligned}$$

или ако су матрице *A, X* и *B*:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Тада овај систем једначина може матрично да се запише **A X = B**

$$(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot A \cdot X - (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B = 0$$
$$X = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B$$

Нека је

$$A \cdot X - B = 0_i(\varepsilon)$$
$$\min_x \|0_i(\varepsilon)\|_L = \min_x \|A \cdot X - B\|_L, A \in R^{n \times m}, B \in R^n$$

T Скуп свих решења проблема $\min_x \|0_i(\varepsilon)\|_L$ нека је описан са $S = \{x \in R^m \mid \|Ax - B\|_L = \min$, тада је x из скупа решења „тада и само тада" ако вреди следећа релација ортогоналности $A^T(B - Ax) = 0$.

Доказ

Претпоставимо да $\hat{x}$ задовољава једначину $A^T(B - A\hat{x}) = 0$ где је

$$r = B - Ax \quad \hat{r} = B - A\hat{x}$$

за
$$x \in R^m \quad r = B - Ax, \quad \hat{r} = B - A\hat{x},$$
$$r = B - Ax = \hat{r} + A\hat{x} - Ax = \hat{r} - A(x - \hat{x})$$

$$\|r\| = r^T r = (\hat{r} - Ae)^T(\hat{r} - Ae) =$$

Ако означимо $e = (x - \hat{x})$ тада је $r = \hat{r} - Ae$ и $= \hat{r}^T\hat{r} - \hat{r}^T Ae - (Ae)^T\hat{r} + (Ae)^T Ae =$

$$\left\|\hat{r}\right\|^2 - (A^T\hat{r})^T e - e^T(A^T\hat{r}) + \|Ae\|^2$$

Израз је најмањи када је $e = 0 \quad e = (x - \hat{x}) = 0 \quad x = \hat{x}$. Претпоставимо да је $\hat{x}$ минимум $\|r\| = r^T r = (\hat{r} - Ae)^T(\hat{r} - Ae)$ али да не задовољава једначину $A^T(B - A\hat{x}) = 0$ тј. $z = A^T\hat{r} \neq 0$. Нека је $x = \hat{x} + \varepsilon z, \quad \varepsilon > 0 \quad r = \hat{r} - \varepsilon Az$

$\|r\| = r^T r = \hat{r}^T\hat{r} - 2\varepsilon z^T z + \varepsilon^2(Az)^T(Az) < \hat{r}^T\hat{r} = \left\|\hat{r}\right\|^2$ што противуречи претпоставци.

Z44 Нека је дато десет тачака $M_i(x_i, y_i) \quad i = 1,2,......,10$ у координатној равни. Одредити праву $y = a \cdot x + b$ која је најбоља апроксимација линеарне функције, са аспекта методе најмањих квадрата.

Помоћу Матлаба дати приказ у кординатном систему ове регресије. Одредити степен корелације (регресија је функција, у овом случају линеарна, а корелација је одступање од ове праве - грешка).

а) M_i :

x	1	2	4	5	6	9	10	11	3	7
y	5	8	14	17	20	29	32	35	11	23

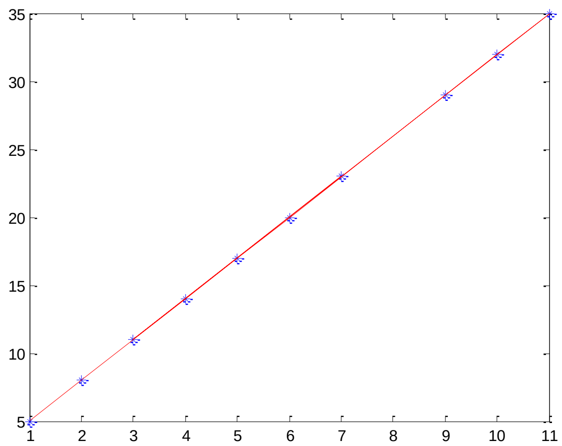
б) M_i :

x	1	2	4	5	6	8	10	11	3	7
y	5	8	14	17	20	29	32	29	11	23

R

а)

```
clear all
x=[1 2 4 5 6 9 10 11 3 7 ];
y=[5 8 14 17 20 29 32 35 11 23];
plot(x,y,'b*');
A=[x' ones(10,1)];
b=y';
xLS=(A'*A)\(A'*b);
k=xLS(1);
l=xLS(2);
yLS=k*x+l;
plot(x,y,'b*',x,yLS,'r');
```

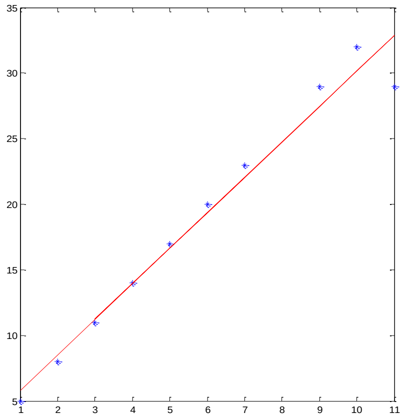


б) M_i :

x	1	2	4	5	6	8	10	11	3	7
y	5	8	14	17	20	29	32	29	11	23

```
clear all
x=[1 2 4 5 6 9 10 11 3 7 ];
y=[5 8 14 17 20 29 32 29 11 23];
plot(x,y,'b*');
A=[x' ones(10,1)];
b=y';
```

```
xLS=(A'*A)\(A'*b);
k=xLS(1)

>> k =
    2.7045

>> l=xLS(2)

l =
    3.1136

>>  yLS=k*x+l;
>>  plot(x,y,'b*',x,yLS,'r');
```

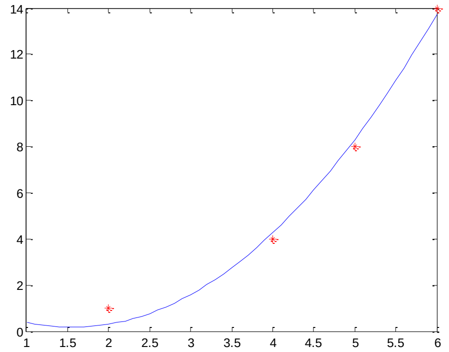


Z45 За задате тачке (1,0), (2,1), (4,4), (5,8), (6,14) наћи квадратни трином који је најближи овим тачкама тј. такав да је збир квадрата растојања по „вертикалама“ минималан. За ову регресиону параболу дати графички приказ у координатном систему.

R

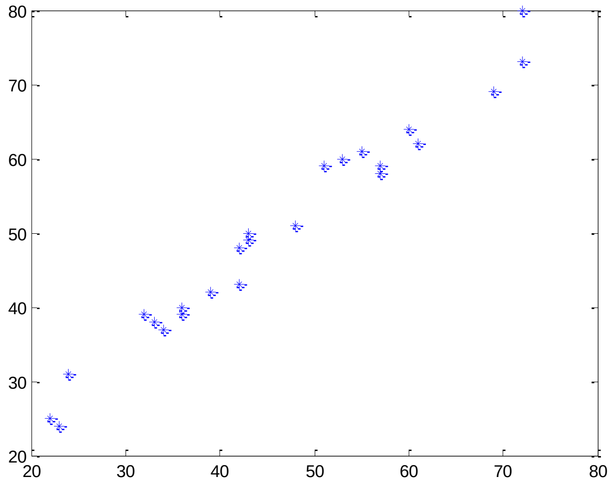
```
clear all
y=[0 1 4 8 14]';
A=[1 1 1
    4 2 1
    16 4 1
    25 5 1
    36 6 1];
xLS=A\y;
 q=norm(A*xLS)/norm(y)
 x=[1 2 4 5 6]';
plot(x,y,'r*')
hold
x1=1:0.1:6;
y1=xLS(1)*x1.^2+xLS(2)*x1+xLS(3);
```

```
plot(x1,y1,'b')
```

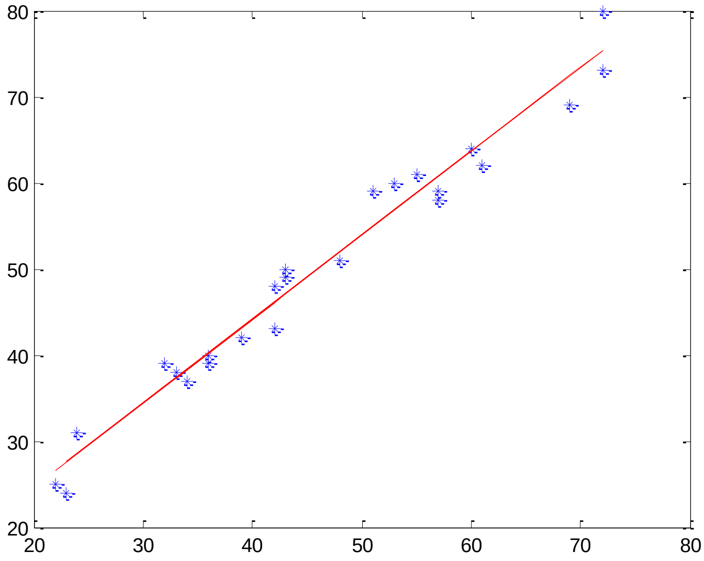


Емпиријски подаци брзине путничког возила са инструменталне табле и са- GPS-а (регресиона права и коефицијент корелације)

```
clear all
x=[24 32 42 43 72 53 36 51 36 43 55 60 22 42 33 57 23 34 39 48 57 61 69 72];
y=[31 39 48 49 80 60 39 59 40 50 61 64 25 43 38 59 24 37 42 51 58 62 69 73];
plot(x,y,'b*')
```



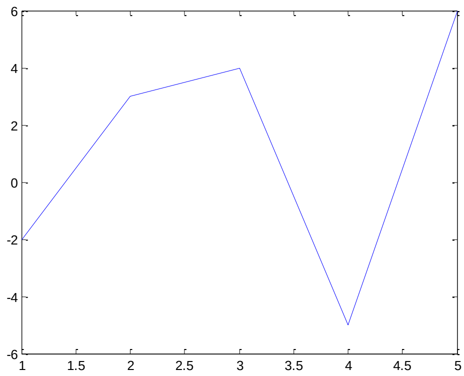

```
clear all
>> x=[24 32 42 43 72 53 36 51 36 43 55 60 22 42 33 57 23 34 39 48 57 61 69 72];
>> y=[31 39 48 49 80 60 39 59 40 50 61 64 25 43 38 59 24 37 42 51 58 62 69 73];
>> plot(x,y,'b*');
>> A=[x' ones(24,1)];
 B=y';
xLS=(A'*A)\(A'*B);
k=xLS(1);
l=xLS(2);
yLS=k*x+l;
 plot(x,y,'b*',x,yLS,'r')
```



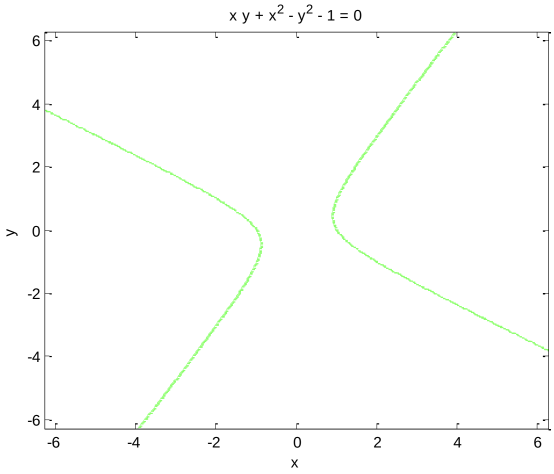
R = corrcoef(x,y)
R = 0.9851
yLS-x ans =
Columns 1 through 15 4.5550 4.3683 4.1350 4.1117 3.4350 3.8783 4.2750 3.9250 4.2750 4.1117 3.8317 3.7150 4.6017 4.1350 4.3450
Columns 16 through 24 3.7850 4.5783 4.3217 4.2050 3.9950 3.7850 3.6917 3.5050 3.4350

Графичко представљање помоћу наредбе plot

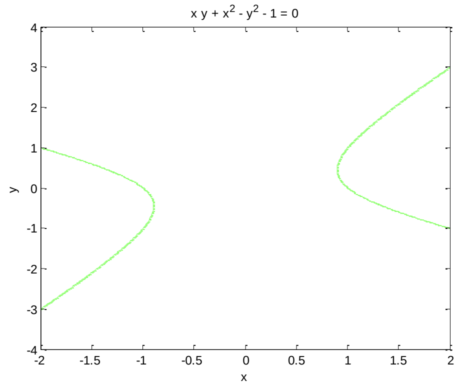
1. x=[1 2 3 4 5]; y=[-2,3,4,-5,6]; plot(x,y)



2. ezplot('x.*y + x.^2 - y.^2 - 1')



ezplot('x.*y + x.^2 - y.^2 - 1',[-2,2,-4,4])



Z$_{46}$ Задате су тачке у Декартовој равни $(1,3),(2,6),(3,12),(4,20),(7,56)$.

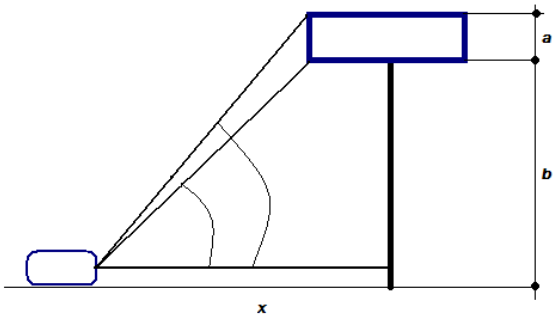
Поставити параболу $y = ax^2 + bx + c$ тако да збир растојања од тачака до параболе буде минималан.

□ Решење – „*Matlab*“

```
A=[1 1 1;4 2 1;9 3 1;16 4 1;49 7 1];
>> B=[3;6;12;20;56];
>> C=(A'*A);
>> Y=inv(C);
>> X=Y*A'*B
```

X =
1.0686
0.3229
1.4192

Видно поље саобраћајног знака вертикалне сигнализације



Где је
b-висина стуба на коме се налази «табла висине а»
a+b=висина стуба са знаком
x - растојање светла возила до стуба
θ - је угао под којим се види «табла, знак» $\theta = (\alpha - \beta)$
y(x) - је промена угла θ у функцији растојања x –растојање возила до знака
Адициона формула - тригонометрија

$$tg\theta = tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \bullet tg\beta}$$

Замена: $tg\alpha = \frac{a+b}{x} \quad tg\beta = \frac{b}{x}$

$$tg\theta = \frac{\frac{a+b}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{a+b}{x} \bullet \frac{b}{x}}$$

Сређивање

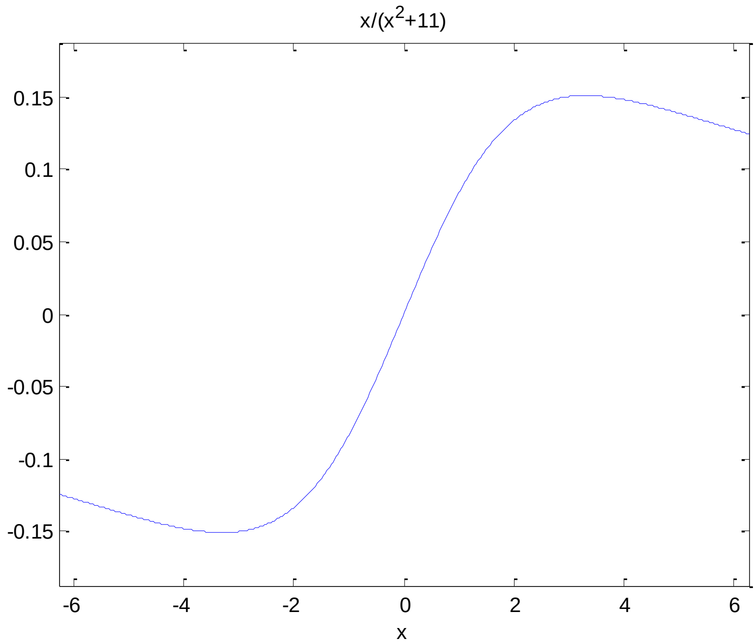
$$tg\theta = \frac{\frac{a}{x}}{\frac{x^2 + (a+b)\bullet b}{x^2}} \qquad tg\theta = \frac{a\bullet x}{x^2 + (a+b)\bullet b} \qquad tg\theta = y(x)$$

$$y(x) = \frac{a\bullet x}{x^2 + (a+b)\bullet b}$$

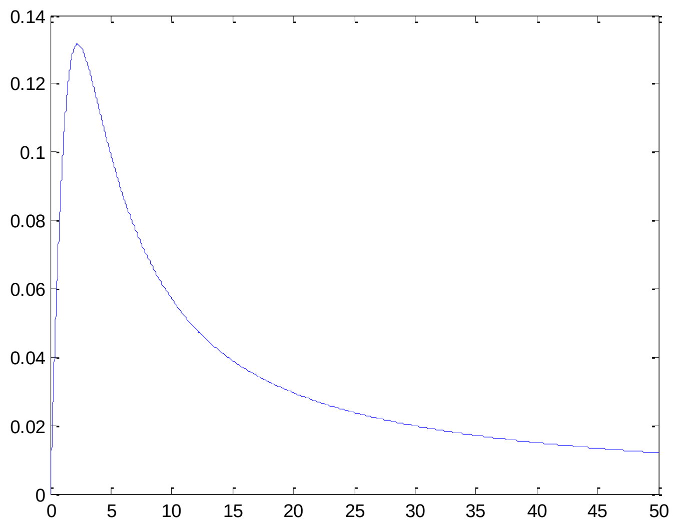
y(x)-одређује промену угла видног поља табле саобраћајног знака у зависности од растојања возила x.
За: a=1, b=10; a=0.6,b=2 ;a=3,b=4 у програмском језику MATLAB претстављени су графици функције „визуелизације“

$$y(x) = \frac{a\bullet x}{x^2 + (a+b)\bullet b}$$

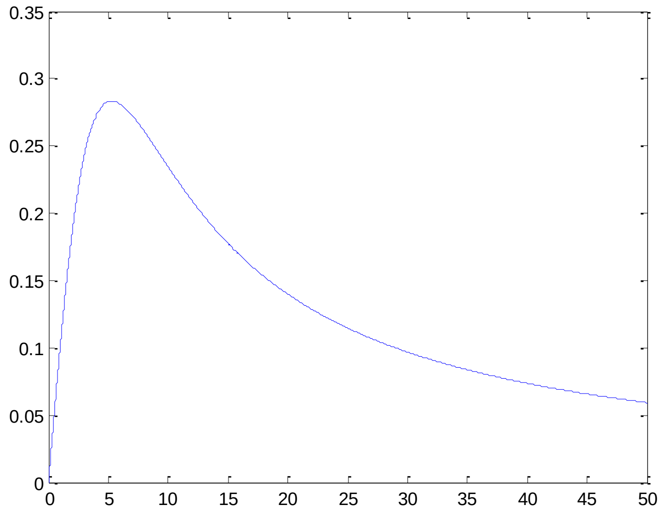
ezplot('x./(x.^2+11)')




```
x = 0:.01:50;
>>  y=0.6*x./(x.^2+2.6*2);
>>  plot(x,y)
```



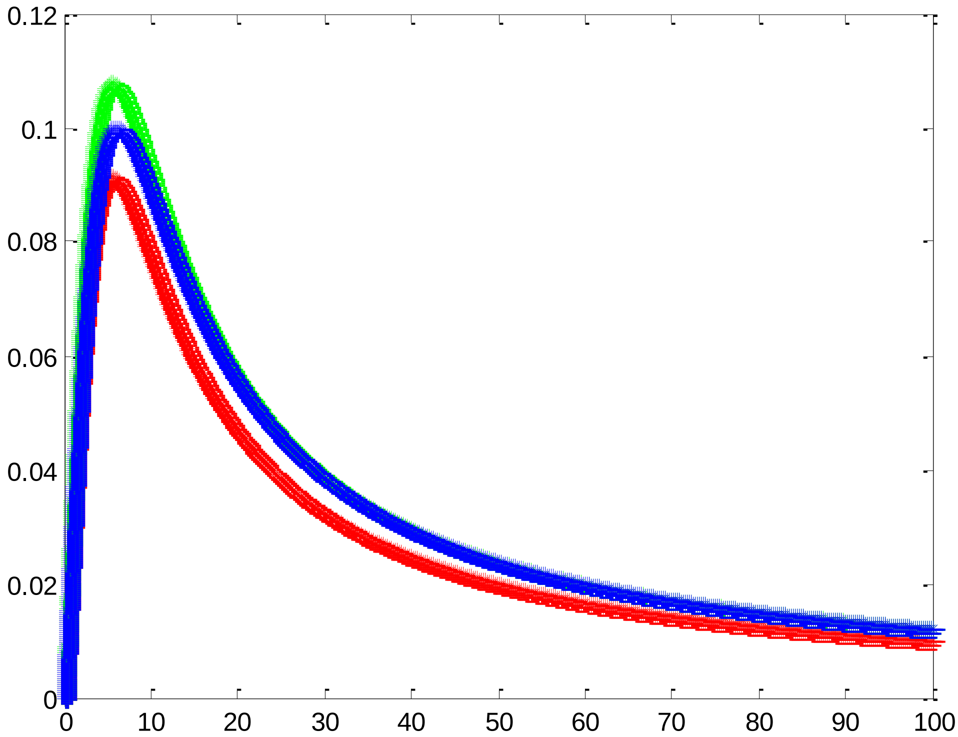

```
x = 0:.01:50;
 y=3*x./(x.^2+7*4);
>> plot(x,y)
```



Ако се семафор поставља на конзоли изнад пута онда доња ивица семафора d_i: 4.5<d_i<5.5

$b = 5 \pm 0.5 \qquad a = 1 \pm 0.2$

```
x = 0:.01:100;
>> y=1*x./(x.^2+6*5);
>> y1=1.2*x./(x.^2+6.2*5);
>> y2=1.2*x./(x.^2+7.2*5);
>> plot(x,y,'r*',x,y1,'g*',x,y2,'b*')
```



Површина испод функције даје квалитет видног поља. за

$x = 20m \quad a = 1m \quad b = 5m \quad P = 1.331\,m^2$

$x = 40m \quad a = 1m \quad b = 5m \quad P = 1.998\,m^2$

$x = 80m \quad a = 1m \quad b = 5m \quad P = 2.681\,m^2$

$x = 100m \quad a = 1m \quad b = 5m \quad P = 2.908\,m^2$